



TITLE:

水面波動乱流の数値的研究における
スペクトルの離散化の影響につ
いて (非線形波動現象の数理とその
応用)

AUTHOR(S):

田中, 光宏; 横山, 直人

CITATION:

田中, 光宏 ...[et al]. 水面波動乱流の数値的研究におけるスペクトルの離散化の影響について (非線形波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2003, 1311: 40-51

ISSUE DATE:

2003-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/42913>

RIGHT:

水面波動乱流の数値的研究におけるスペクトルの 離散化の影響について

岐阜大工 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)

Faculty of Engineering, Gifu University

京大理 横山直人 (YOKOYAMA Naoto)

Faculty of Science, Kyoto University

1 イントロダクション

近年の計算機能力の急速な進歩により、海洋波浪場に代表されるような波動乱流（弱乱流）の統計的性質を、決定論的な支配方程式の直接数値シミュレーションに基づいて研究することが可能となりつつある。Tanaka (2001a) は非線形水面重力波の基礎方程式を直接数値シミュレーションすることにより、Hasselmann (1962) が理論的に予言していた、連続スペクトルを有する水面重力波の場合における、成分波間の非線形エネルギー輸送関数 S_{nl} の検出を試みた。この非線形エネルギー輸送は、風によるエネルギー供給 S_{in} 、砕波（白波）によるエネルギー散逸 S_{ds} と並んで、海洋波浪場の時間空間発展を支配するもっとも重要なファクターの一つである。また Hasselmann により導出された S_{nl} に対する解析的表現は、WAM モデル (Komen et al. 1994) をはじめ、あらゆる数値波浪予測モデルにおいて、非線形エネルギー輸送をモデル化する際の唯一の拠り所となっている。

S_{nl} に対する Hasselmann 理論を含め、水面波の波動乱流理論は通常、対象とする水面は無限に広く、エネルギーは 2 次元波数ベクトル平面において連続的に分布していることを想定している。一方、波動場を決定論的に追跡する場合、無限大の自由度を追跡することはもとより不可能であり、必然的に何らかの離散化を行い、時間的に追跡すべき自由度の数を有限に落とさざるを得ない。Tanaka (2001a) では x - y 平面の面積 $L \times L$ の正方形領域を対象としたフーリエ表現が用いられており、したがって波数ベクトル k 平面は $2\pi/L \times 2\pi/L$ を 1 メッシュとする正方形メッシュに離散化され、エネルギーはメッシュ点のみに分布している。波数ベクトルスペクトル $Q(k)$ は、ある適当な波数解像度 Δk を固定した後、 k を中心とした面積 $\Delta k \times \Delta k$ の正方形内に含まれるすべてのメッシュ点（すなわち成分波）についてエネルギーの総和を求めることにより推定され、またある解像度 $\Delta\omega$ の周波数スペクトル $f(\omega)$ は同様に、 k 平面を $\Delta\omega$ に対応する幅の円環領域に分割し、各円環に含まれるすべての成分波のエネルギーを合計することにより求められた。

Hasselmann 理論など連続スペクトル的描像に基づく理論では、波数 k のエネルギースペクトル密度は、共鳴条件を満足する 4 波間の相互作用によって変化し、その時間スケールは、成分波の代表的な急峻度および周期をそれぞれ ϵ , T とすると $O(T/\epsilon^4)$ で与えられる。 $\epsilon \approx 0.1$ 程度の現実的な波動場に対しては、数 1000 から数 10000 周期程度の長時間の間に非共鳴相互作用による変動は位相部分の時間平均によって消滅し、その結果共鳴 4 波間の相互作用のみが有為な非可

逆なエネルギー輸送をもたらす。一方、プリミティブな基礎方程式に基づく決定論的数値計算においては、 k 平面上の連続スペクトルを模擬するほど稠密に成分波を分布させ、かつ数 1000 周期にわたる時間発展を追跡することは天文学的な計算時間を要求し、このままでは S_{nl} に対する Hasselmann 理論の検証など一見実行不可能なように思われる。しかし実際は、スペクトルの推定において用いられる波数解像度 Δk と、数値計算で考慮されている成分波の間隔 $2\pi/L$ の違い ($\Delta k \gg 2\pi/L$) により、スペクトル推定の段階で (ほぼ) 独立な成分波間での位相平均操作がなされ、それが時間方向の平均化による非共鳴部分の消去と同等の効果をもたらすために、わずか 20 周期程度という短時間の時間発展からでも共鳴相互作用による非線形エネルギー輸送を検出できることが Tanaka(2001a) によって示された。

直接数値シミュレーションから推定されたエネルギースペクトルおよびその時間変化率である非線形エネルギー輸送関数の信頼度を上げるには 2 つの道がある。一つは k 平面上のメッシュを細かくし、スペクトル推定の際の一つのビンに入るメッシュ点、すなわち成分波の数を増やすこと、もう一つはスペクトル的には等価でありながら成分波の位相のみが異なるような初期波動場からの時間発展をより多く追跡し、アンサンブル平均の際の実現の数を増加させることである。Tanaka (2001a) では、連続スペクトル中の成分波間の非線形相互作用を忠実に再現するためには k 平面上の成分波の分布をできる限り密にするべきと考えた結果、実現の数をせいぜい 10 数個程度と、統計平均を議論するには心もとない数に制限せざるを得なかった。

スペクトル推定の信頼度を決定する統計的自由度だけに関しても、成分波の密度を上げることと実現の数を増やすことは等価である。しかし連続スペクトルを有する波動乱流のシミュレーションということを考えると、モードの離散化の度合いがある程度以上に強くなると、いくら実現の数を増やして統計的自由度を大きく保持したとしても、連続スペクトルに対して弱乱流理論が予言するものとは定性的に異なるエネルギー輸送関数しか得られなくなるのではないかとの疑念も当然のことながら湧いてくる。本研究はこのような問題意識から、非線形エネルギー輸送関数など波動乱流スペクトルに関する統計的諸量をプリミティブな方程式の直接数値シミュレーションに基づいて検討する際に、信頼できる結果を得るために必要とされる波数ベクトル k 平面上の成分波の分布密度および実現数に関しての定量的な知見を得ることを目指すものである。まず最初に次の §2 で数値シミュレーションの基礎として用いる支配方程式系や数値手法などについて簡潔な説明を与え、続く §3 において数値計算結果およびそれに対する議論・考察を与える。

2 基本的事項

2.1 基礎方程式

無限に深い水の層の表面重力波を考える。水は非圧縮・非粘性で、その運動は非回転とする。このとき水の運動の速度場は速度ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ の勾配で表現され、 $\phi(x, z, t)$ はラプラス方程式の解となる。自由表面における運動学的条件、力学的条件などをあわせて考慮すると、水

面重力波の発展を記述する基礎方程式系は以下のようになる。

$$\nabla^2 \phi(x, z, t) = 0, \quad -\infty < z \leq \eta(x, t) \quad (1)$$

$$\phi_t + gz + (1/2)(\nabla \phi)^2 = 0, \quad z = \eta(x, t) \quad (2)$$

$$\eta_t + \nabla_h \phi \cdot \nabla_h \eta = \phi_z, \quad z = \eta(x, t) \quad (3)$$

$$\phi \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty \quad (4)$$

ここで $\eta(x, t)$ は平均水面からの水面変位, $\nabla_h \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は水平 x - y 平面における勾配演算子を表す. z は鉛直上向きの座標で, その原点は平均水面上に取る. 自由表面における速度ポテンシャルの値 $\psi(x, t) (= \phi(x, \eta(x, t), t))$ を用いると, 自由表面における境界条件 (2), (3) は

$$\psi_t + g\eta + (1/2)(\nabla_h \psi)^2 - (1/2)W^2 \{1 + (\nabla_h \eta)^2\} = 0, \quad (5)$$

$$\eta_t + \nabla_h \psi \cdot \nabla_h \eta - W \{1 + (\nabla_h \eta)^2\} = 0, \quad (6)$$

と書き直すことができる. ここで $W(x, t)$ は自由表面における鉛直速度を表す.

境界条件 (5), (6) に従って波動場の時間発展を数値的に追跡していくためには, 各時間ステップにおいて $\phi(x, z, t)$ に対するラプラス方程式のディリクレ問題を解いて $W(x, t)$ を求める必要がある. この目的のために我々は, West *et al.* (1987) および Dommermuth and Yue (1987) によってほぼ同時期に, しかし独立に開発された「高次スペクトル法」を用いる. 高次スペクトル法に関しては上記 2 編の原論文の他に Tanaka (2001b) にも簡潔なレビューがあるので参照されたい. 高次スペクトル法においては, $\phi(x, z, t)$ に対するディリクレ問題は, 振幅展開と高速フーリエ変換を用いて極めて効率的に解かれる. これにより W が求まれば, (5) と (6) をルンゲ-クッタ法など常微分方程式に対する標準的な数値手法により時間に関して積分することで, 任意の時刻における波動場を求めることができる. なお, 二つの類似した高次スペクトル法のうち, West *et al.* (1987) だけが (5), (6) を振幅展開という観点から見てコンシステントな方法で取り扱い, 他の理論的研究との比較が容易と思われるので, ここではこちらの手法を採用する.

2.2 複素振幅関数 $b(k)$

Zakharov (1968) は (1), (5), (6) で規定される境界値問題が, 全エネルギーをハミルトニアンとし $\{\eta(x, t), \psi(x, t)\}$ を正準変数とするハミルトン系として定式化できることを示した. その中で彼は波動場を記述するより便利な正準変数として「複素振幅関数」 $b(k, t)$ を

$$b(k, t) = \left(\frac{\omega(k)}{2k}\right)^{1/2} \hat{\eta}(k, t) + i \left(\frac{k}{2\omega(k)}\right)^{1/2} \hat{\psi}(k, t). \quad \omega(k) = (gk)^{1/2}, \quad (7)$$

により導入した。¹ ここで $\hat{\eta}(\mathbf{k})$ と $\hat{\psi}(\mathbf{k})$ はそれぞれ $\eta(\mathbf{x})$ と $\psi(\mathbf{x})$ のフーリエ変換を示す。逆に $\eta(\mathbf{x})$ および $\psi(\mathbf{x})$ はこの $b(\mathbf{k}, t)$ により

$$\eta(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\mathbf{k}}{2\omega(\mathbf{k})} \right)^{1/2} \{b(\mathbf{k}) + b^*(-\mathbf{k})\} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (8)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{-i}{2\pi} \int \left(\frac{\omega(\mathbf{k})}{2k} \right)^{1/2} \{b(\mathbf{k}) - b^*(-\mathbf{k})\} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (9)$$

と表される。 $b(\mathbf{k}, t)$ は波数ベクトル \mathbf{k} の成分波の振幅及び位相を規定する量となっている。(5), (6) を数値的に積分することにより直接得られる $\eta(\mathbf{x}, t)$, $\psi(\mathbf{x}, t)$ から $b(\mathbf{k}, t)$ に移行することによりスペクトルを用いた波動場の表現が可能となる。

我々の計算では x, y 両方向に周期 L の周期性を仮定している。したがって波数ベクトル \mathbf{k} は

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y) = \left(\frac{2\pi k}{L}, \frac{2\pi l}{L} \right), \quad (k, l : \text{integer}) \quad (10)$$

のように離散化され、これに対応して $\eta(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{x})$, そして $b(\mathbf{k})$ は

$$\eta(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\eta}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad b_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2|\mathbf{k}|} \right)^{1/2} \hat{\eta}_{\mathbf{k}} + i \left(\frac{|\mathbf{k}|}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \quad (11)$$

のように離散フーリエ変換により表現される。またこの時、単位水平面積あたりのエネルギー密度 E は最低次（すなわち線形）の近似では

$$E \approx \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} |b_{\mathbf{k}}|^2 \quad (12)$$

で与えられる。方向スペクトル $F(\omega, \theta)$ の定義より E はまた

$$E = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty F(\omega, \theta) d\omega d\theta = \int \frac{g^2}{2\omega^3} F(\omega, \theta) d\mathbf{k} \approx \sum_{\mathbf{k}} \frac{g^2}{2\omega_{\mathbf{k}}^3} F(\omega, \theta) \Delta S_{\mathbf{k}} \quad (13)$$

とも表される。ここで $\Delta S_{\mathbf{k}}$ は離散化された \mathbf{k} 平面の 1 メッシュの面積で $\Delta S_{\mathbf{k}} = (2\pi/L)^2$ 。(12), (13) より $|b_{\mathbf{k}}|$ と $F(\omega, \theta)$ の間の関係

$$|b_{\mathbf{k}}|^2 \approx \frac{g^2}{2\omega_{\mathbf{k}}^4} F(\omega, \theta) \Delta S_{\mathbf{k}} \quad (14)$$

が得られ、この関係を用いることにより任意の初期スペクトル $F(\omega, \theta)$ に対応する $\{b_{\mathbf{k}}\}$ の分布を構築することができる。 $\{b_{\mathbf{k}}\}$ の初期位相には $[0, 2\pi]$ の一様乱数を用いることにする。

本研究では重力加速度 g およびスペクトルピークの角振動数 ω_p がともに 1 になるように空間および時間を規格化する。また初期方向スペクトル $F(\omega, \theta)$ としては $\cos^2 \theta$ 型の方向依存性を持つ JONSWAP スペクトルを採用する。すなわち $F(\omega, \theta) = f(\omega)G(\theta)$ とし、 $f(\omega)$, $G(\theta)$ は

$$f(\omega) = \alpha \omega^{-5} \exp \left(-\frac{5}{4\omega^4} \right) \gamma^{\exp[-(\omega-1)^2/2\sigma^2]}, \quad \gamma = 3.3, \quad \sigma = \begin{cases} 0.07 & (\omega < 1), \\ 0.09 & (\omega \geq 1), \end{cases} \quad (15)$$

¹ $b(\mathbf{k}, t)$ 以上に便利な正準変数の導入の試みについては、Krasitskii (1994), Zakharov et al. (1992) を参照のこと。

$$G(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos^2 \theta, & |\theta| \leq \pi/2, \\ 0, & |\theta| > \pi/2 \end{cases} \quad (16)$$

で与えられるものとする。(15)の定数 α はすべての計算において $E \approx \sum_k \omega_k |b_k|^2 = 0.003$ となるように選ぶ。 E のこの大きさは、例えばピーク周期 8 秒 (波長 100m) の場合、有義波高が $H_S \approx 3.5\text{m}$ 程度の波浪場に相当している。

2.3 波数スペクトル $q(k)$ と 1 次元輸送関数 $T(k)$ の推定

スペクトルの離散化の影響を調べるための代表的統計量として、本研究では波数スペクトル $q(k)$ の時間変化率 $T(k)$ に着目する。エネルギー密度 E は $\{b_k\}$ 及び $q(k)$ により近似的に

$$E \approx \sum_{k,l} \omega_{k,l} |b_{k,l}|^2, \quad E = \int_0^\infty q(k) dk \approx \sum_j q(j\Delta k) \Delta k \quad (17)$$

と表現される。これより波数間隔 Δk ごとの $q(k)$ の値は近似的に

$$q(j\Delta k) \approx \sum'_{k,l} \omega_{k,l} |b_{k,l}|^2 / \Delta k, \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (18)$$

で与えられる。ここで $\sum'_{k,l}$ は、条件

$$(j - \frac{1}{2})\Delta k \leq |k_{k,l}| < (j + \frac{1}{2})\Delta k \quad (19)$$

を満たすようなモード番号の組 (k, l) についての和を表す。本研究では $\Delta k = 0.1$ としている。²

上記の方法で Δk 跳びの k における波数スペクトル $q(k)$ の値が各時刻において求められる。ある特定の波数 k に対する $q(k; t)$ の時間発展に対して最小二乗法により直線を当てはめ、その傾きを見ることにより、その波数における 1 次元輸送関数 $T(k)$ の値を推定することができる。スペクトルピークに対応する周期を $T_p (= 2\pi)$ とすると、本研究では $T_p/5$ ごとに $q(k; t)$ を求め、そのうち $9T_p \leq t \leq 25T_p$ の間のデータに対して当てはめた直線の傾きから $T(k)$ を推定している。最初の 9 周期分を使用しなかったのは、線形波の単純な重ね合わせとして構築された初期波動場が、それなりの高調波 (拘束波) を伴った「コンシステントな」非線形波動場に移行していく過渡期に発生する異常なトランスファーの影響を除くためである。

3 数値結果

3.1 設定

波動場は x, y についてともに周期 L の周期性を有すると仮定し、 $L \times L$ の正方形領域内に $N_x \times N_y$ 個のメッシュ点を有する長方形メッシュを配置する。高次スペクトル法における非線形

²この Δk は $q(k)$ の値を推定したい k の間隔であり、数値計算で考慮する k 平面のメッシュ点 (成分波) の間隔 $2\pi/L$ とは全く別物であることに注意。

次数 M は3とする。これは共鳴・非共鳴にかかわらず、すべての3波および4波相互作用を考慮し、5波以上の相互作用をすべて無視することを意味する。離散フーリエ変換を用いたスペクトル法に付随して発生するエイリアジング誤差を除去するために、 x 方向の最大モード番号 k_{\max} および y 方向の最大モード番号 l_{\max} はそれぞれ

$$k_{\max} = N_x/(M+1) - 1, \quad l_{\max} = N_y/(M+1) - 1 \quad (20)$$

と取る。主な伝播方向である x 方向についてはスペクトルピークの16倍高調波(ここでの規格化では $k_x = \pm 16$) 程度までが計算に含まれることを要求して、スペクトルピークのモード番号 k_p を $k_p = N_x/(M+1)/16$ とする。 y 方向についてはスペクトルの方向依存性が $\cos^2 \theta$ 型で、 y 方向の平均的波数が x 方向のその1/2であることを考慮し、計算量の節約のため $k_y = \pm 8$ で打ち切る。実空間における基本領域は正方形であり、したがって k 平面上のメッシュも正方形メッシュなので、これは $N_y = N_x/2$ と取ることを意味する。

時間についての積分は4次精度のルンゲ・クッタ法を用い、時間きざみ Δt はすべての計算において $\Delta t = T_p/50$ とする。

本研究で取り扱ったケースの一覧を表1に示す。スペクトルピークのモード番号 k_p は数値計算

ケース名	$N_x \times N_y$	k_{\max}	l_{\max}	k_p	総モード数	実現の数
case[13-12]	$2^{13} \times 2^{12}$	2,047	1,023	128	8,382,465	10
case[12-11]	$2^{12} \times 2^{11}$	1,023	511	64	2,094,081	40
case[11-10]	$2^{11} \times 2^{10}$	511	255	32	522,753	160
case[9-8]	$2^9 \times 2^8$	127	63	8	32,385	2,560
case[8-7]	$2^8 \times 2^7$	63	31	4	8,001	5,120

表 1: 取り扱ったケースの一覧

で取り扱う実空間での基本領域の広さを表す。例えば case[13-12] の場合、 x - y 平面における基本領域は $128\lambda_p \times 128\lambda_p$ の正方形である。ここで λ_p はスペクトルピークに対応する波長で、ここでの規格化の下では 2π である。総モード数は、実際にその複素振幅の時間発展を追跡する成分波の数であり、 $(2k_{\max} + 1) \times (2l_{\max} + 1)$ で与えられる。実現の数は case[8-7] を除き、総モード数に反比例するように設定しているが、これについては以下で述べる。

われわれは JONSWAP スペクトルを有する不規則波動場に対して、そのスペクトル $q(k)$ の変化率から $T(k)$ を検出しようとしている。初期スペクトルが規定された場合、各成分波の振幅 $|b_k|$ は(14)により確定するが、初期位相は一様乱数などで任意に与えるしかない。スペクトル的に同等である異なる初期波動場は無限に多く存在し、それらから出発した決定論的な時間発展(これらの一つ一つを「実現」と呼ぶ)もまたすべて異なったものになる。より信頼度の高いスペクトル(およびその変化率)を得るためには、初期スペクトルに関して同等な実現をできるだけ多く作成し、それらについてのアンサンブル平均を用いる必要がある。一方 §2.3 で述べたように、 $q(k)$ の推定には k 平面上のある領域(ビン)に含まれる成分波についての和を取るという操作が含まれ

ている。したがって k 平面上の成分波の分布密度を高めることによって、推定の信頼度を上げることができる。高次スペクトル法を用いたシミュレーションプログラムの場合、一つの実現の作成に要する計算時間は含まれるモード数にほぼ比例するので、計算全体にかかる経済的・時間的な総負担量は、一つの実現に含まれるモード数と実現の数の積にほぼ比例する。表1で示した各ケースでは、case[8-7]を除いて、モード数と実現の数の積がほぼ一定になるように取っており、したがってこれらの各ケースは負担の総量に関して同等となっている。また上で述べたように $q(k)$ の推定は、 k 平面上の一定面積内の成分波についての和および実現間でのアンサンブル平均という2段階の平滑化（平均化）操作によりなされており、その自由度は実現の数とモードの分布密度の積、すなわち実現の数とモード数の積に比例する。したがって表1の各ケースは、負担総量だけでなく推定の信頼度に関しても互いに同等になっていると言える。

しかしその一方で、われわれが再現を試みているのは、あくまでも連続スペクトル中のエネルギー輸送であること、それには共鳴条件を満たす4波間の相互作用が決定的な役割を果たしていること、 k 平面での離散化が激しくなるほど共鳴条件の成立が困難になり、共鳴条件を満足する成分波の組み合わせが急激に減少して行くに違いないこと、などを考えると、 k 平面上のモードの分布がある限度を超えて疎になった場合には、いくら多くの実現を集めて推定自由度を増やそうとも、連続スペクトルに対するエネルギー輸送関数を再現することが不可能な状況に陥ることが予想される。

我々は総負担量および推定自由度に関して同等でありながら、モード離散化の度合いが異なるさまざまなケースから推定された $T(k)$ を比較することによって、連続スペクトルを模擬するのに必要な最低限度のモード密度について何らかの定量的な情報を得られるのではないかと期待してこの計算を開始した。

3.2 結果と考察

一つのケースの実現の数を N 、また一つの実現（決定論的時間発展）が与える非線形輸送関数の実現値を $T_j(k)$ ($j = 1, \dots, N$) とする。case[13-12], case[11-10] および case [9-8] に対する標本平均 $T(k)$ 、すなわち

$$T(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N T_j(k) \quad (21)$$

を図1に示す。図から見られるように、総計算量は同程度ながらも離散化の度合いが大きく異なるこれらの3ケースからはほぼ同等な $T(k)$ が得られる。次に標本平均 $T(k)$ の信頼度について考える。標本平均 $T(k)$ と母集団平均の差は、実現値 $T_j(k)$ の不偏分散

$$s^2(k) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (T_j(k) - T(k))^2 \quad (22)$$

と実現数 N を用いて $s(k)/\sqrt{N}$ でスケールされることが統計推定理論より知られている。図2は case[13-12], case[11-10] および case [9-8] について $\sigma(k) = s(k)/\sqrt{N}$ をプロットしたものである。

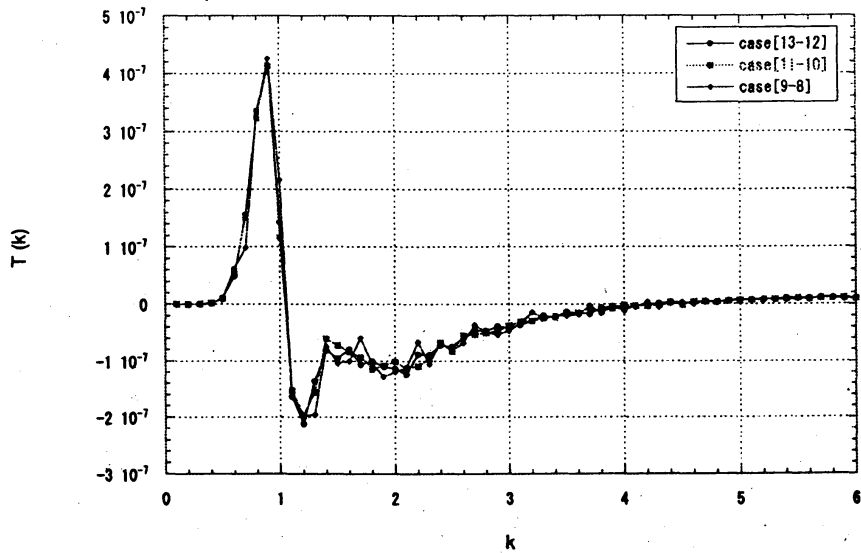


図 1: $T(k)$ for cases[13-12], [11-10] and [9-8].

参考のため, case[13-12] から得られた $T(k)$ も再度プロットした. ただし case [9-8] については実

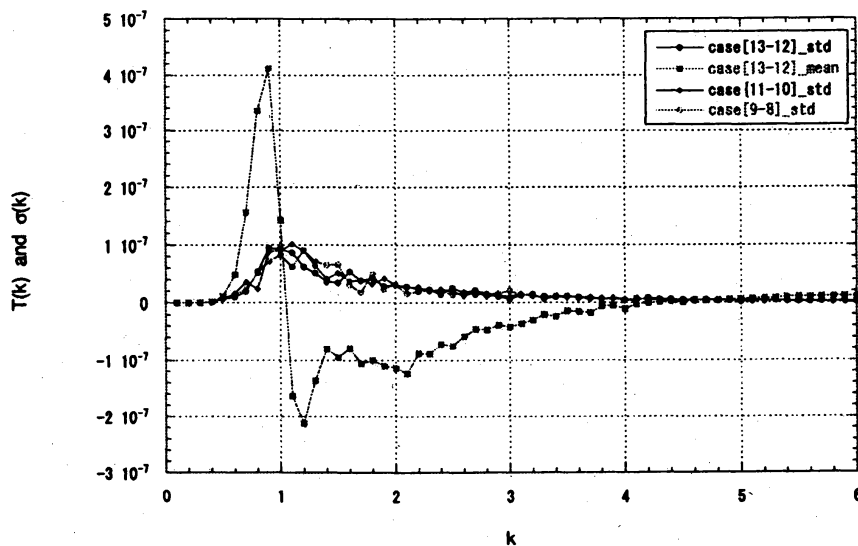


図 2: $\sigma(k)$ for cases[13-12], [11-10] and [9-8].

現数が 2560 とかなり多いため 32 個ずつの実現について部分的に平均した値のみを出力している
ので, これら 80 個の部分的平均値を実現値 $T_j(k)$ ($j = 1, \dots, 80$) と見做している. この図より,
これら 3 ケースから得られる平均値 $T(k)$ はその値のみならず信頼性という意味でも本質的に差
異がないことが分かる.

次にモード分布をもう一段階粗くした case[8-7] から得られた $T(k)$ を図 3 に示す. 比較のために
最大のモード密度を有する cases[13-12] から得られた結果も再度表示した. ここで示した case[8-7]
の結果は 5120 個の実現についての平均であり, 他のケースに比べ総計算量は 1/2 であるが, 得ら

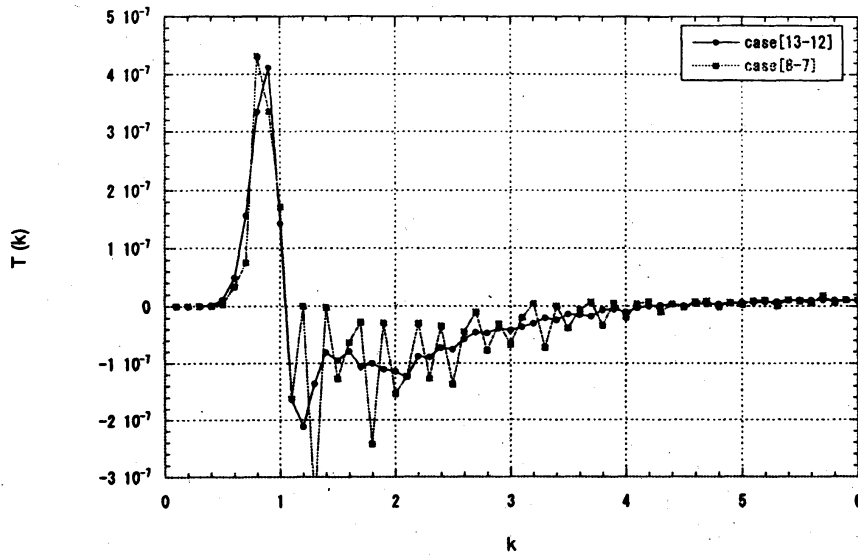


図 3: $T(k)$ for cases[13-12] and [8-7].

れた実現の範囲でアンサンブル平均に使う実現数を順次増大させてもガタガタの度合いに変化は見られず、仮に実現数を2倍にして総計算量を他のケースと同等にしても、よりスムーズな $T(k)$ が得られるとは思えない。case[8-7]について、(18)による $q(k)$ の計算の際に幅 $\Delta k = 0.1$ の各ビンに入るモード数を図4に示す。図3に示した $T(k)$ の $1 < k < 4$ あたりに見られる大きな振動

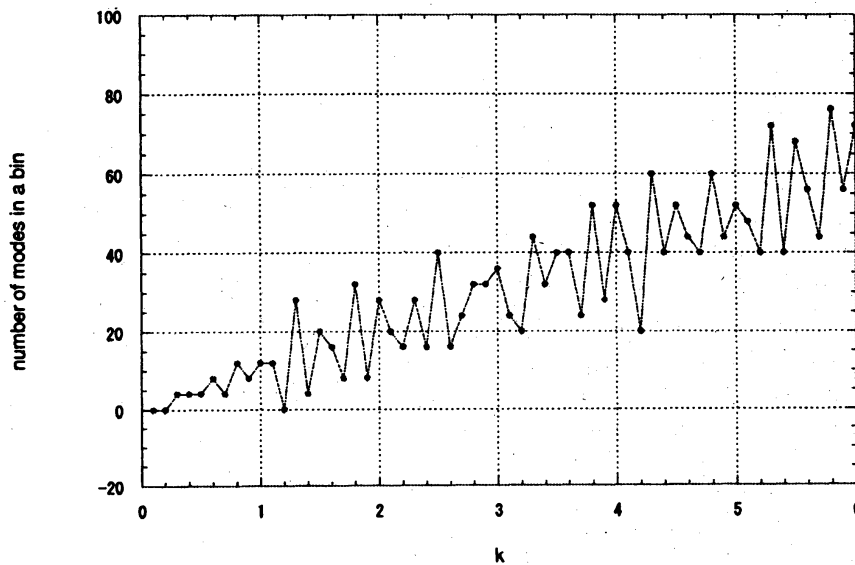


図 4: number of modes in a bin. $\Delta k = 0.1$, cases[8-7].

は、所属するモード数の非常に少ないビンの出現と連動していることが分かる。

case[8-7]ほどにモード分布が疎になると、スペクトルピーク周辺の最も重要な波数領域においてすら、所属するモードが一つもないようなビンが発生するなど、そもそもスペクトル変動につい

て正しい結果を期待できるような状況でなくなる。³ そういう意味では、むしろそれより一段階密なだけの case[9-8] が、それに見合うだけの実現数さえ用意すれば、その 260 倍ものモードを含む case[13-12] とほぼ遜色のない結果を与えることこそ意外である。case[9-8] のシミュレーションに含まれる成分波の k 平面における分布を図 5 に示す。この case では $k_p = 8$ 、すなわち実空間における計算対象領域は $8\lambda_p \times 8\lambda_p$ というきわめて狭い「海面」であり、 $q(k)$ がピークでの値の 1/2 以上の値をとる領域（ここには全エネルギーの 50% 以上のエネルギーが含まれる）はたった 31 本の線スペクトルで近似されている。これほど疎なモード分布しか持たないシステムであっても、

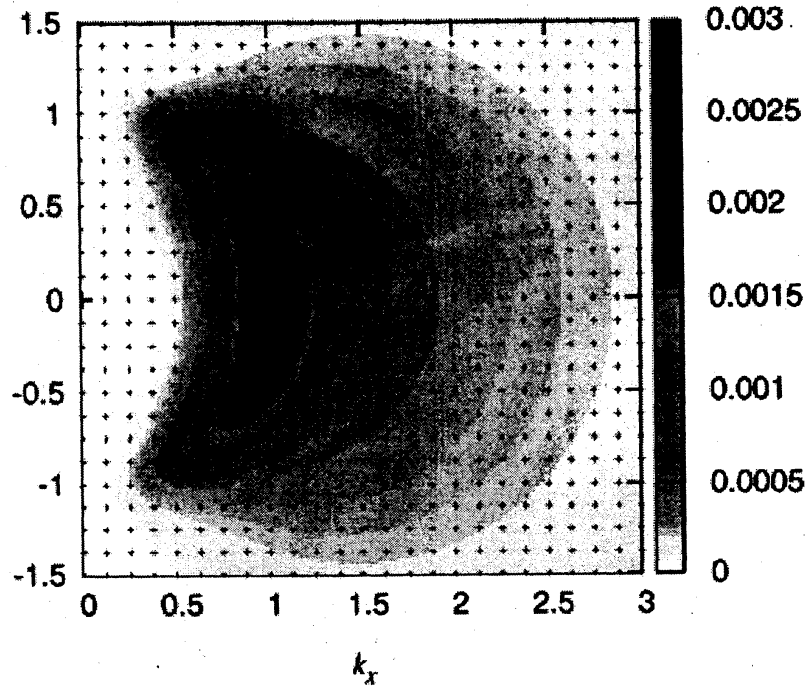


図 5: Sparse distribution of modes on k space for case[9-8].

それに見合うだけ多数の実現にわたってアンサンブル平均を取るにより、連続スペクトル中のエネルギー輸送関数の再現が可能であるという事実はむしろ驚くべきことであろう。case[9-8] の一つの実現を求める計算は、例えば CPU が PentiumIII 850MHz の PC の上で Fujitsu FORTRAN を用いて実行した場合、使用メモリーは約 15MB、所要時間は Δt （すなわち 4 次ルンゲクッタの 4 サブステップ）あたり約 5.5 秒、したがって $\Delta t = T_p/50$ で $t = 25T_p$ まで追跡して 2 時間弱であった。この結果は、直接数値シミュレーションによる波動乱流の研究が、必ずしも大型計算機に頼らなくても、ごく普通の PC においても不可能ではないことを示唆している。

非線形性による成分波間のエネルギー輸送は、共鳴条件

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \quad (23)$$

³本研究ではスペクトルの推定に各ビンに入る成分波についての単純な総和を用いているが、これに加えてビン間の重みつき移動平均操作を附加すれば、この case[8-7] ですらそれほど見当はずれでない $T(k)$ を与えたかも知れないと思われるが、ここではこれ以上追求しないでおく。

を満たす4波間で起こることがPhillips (1961) や Hasselmann (1962) により示されているが、この場合 ω の共鳴条件については、非線形性による振動数の補正があるため $O(\epsilon^2)$ 程度の mismatches は許されるものと考えられる。代表振幅として有義波高 H_S の $1/2$ を、また代表波数としてスペクトルピークに対応する波数（ここでの規格化では1）をそれぞれ採用すると、本研究で扱っている波動場では $\epsilon^2 \approx 0.01$ 程度である⁴。総モード数が減少し k 平面上の各成分波に対応する ω の間隔が $O(\epsilon^2)$ を超えるほど疎になると、この非線形性による振動数の補正をもってしてもモードの離散性の影響を乗り越えることが困難となり、その結果いくら実現の数を増やしても、連続スペクトル中の非線形エネルギー輸送を正しく再現できない事態が起こるであろうと考えられる。

Pushkarev (1999) は、表面張力波の波動乱流を直接数値シミュレーションを用いて研究し、波動場のエネルギー密度が十分高い場合には、実空間上で周期境界条件を課して k 平面を離散化しても、非線形性による振動数の補正により、実質的に共鳴条件を満足する多くの3波の組が存在し、その結果弱乱流理論が予測する Kolmogorov スペクトルが実現することを示したが、それと同時に、波動場のエネルギー密度が低い場合には、振動数の非線形補正が十分でなく、互いにエネルギーを交換する3波の組の数が非常に少なくなるために、高波数へのエネルギーのカスケードが起こらず、その結果低波数の限られたモードにエネルギーが閉じ込められた、いわゆる凍結乱流 (frozen turbulence) の状態が実現することを示した。また Kartashova (1998) は、表面張力波の場合、振動数に対する非線形補正を考慮しないとすると、実空間で周期境界条件を課して k 平面を離散化した系においては、共鳴条件を満たす3波の組は一つも存在しないことを整数論の手法、特に「フェルマーの最終定理」を用いて示した。彼女は、これは応用数学分野におけるフェルマーの最終定理の初めての活用例であろうとも述べている。

凍結乱流はモード離散化の度合いが大きいほど、また波動場のエネルギー密度が低いほど出現しやすいと考えられる。そこでわれわれは、正しい $T(k)$ を再現することができたうちで最もモード離散化の度合いが大きい case [9-8] において、 E を 0.003 から 0.001 に変更して再度一連のシミュレーションを行った。その結果得られた $T(k)$ は E^3 でスケールすると図1で示したものとほぼ一致し、したがって凍結乱流の出現を見ることはできなかった。また $T(k)$ は E^3 に比例するため $E = 0.001$ にするとスペクトルの変動が非常に遅くなり、したがって $E = 0.003$ の時と同じように $t = 25T_p$ までのシミュレーションから $T(k)$ を検出しようとする、推定誤差の目安となる $\sigma(k)$ が図2で示したものより相対的にかなり大きくなってしまった。凍結乱流状態を再現するためにはさらに小さな E を採用する必要があると思われるが、そのような小さな E に対して精度良く $T(k)$ を検出するためには今より長時間にわたる時間発展の追跡が必要となり、そのためには数値手法全般のさらなる高速化、高精度化が不可欠であろうと思われる。

本研究の一部は科学研究費補助金（課題番号 12304025；代表者 増田章（九大・応力研））による成果であることを付記し謝意を表す。なお数値計算のうち、横山担当分は京都大学基礎物理学研究所、また田中担当分は名古屋大学大型計算機センターの計算機システムを用いて実行した。

⁴ 近似的に成立する関係 $H_S \approx 4\sqrt{E}$ を用いれば $\epsilon^2 \approx 4E$ 。

参考文献

- [1] Dommermuth, D.G. & Yue, D.K.P. 1987 A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J. Fluid Mech.* **184**, 267–288.
- [2] Hasselmann, K. 1962 On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory. *J. Fluid Mech.* **12**, 481–500.
- [3] Kartashova, E. 1998 Wave Resonances in Systems with Discrete Spectra. *Nonlinear Waves and Weak Turbulence* (ed. V.E. Zakharov), pp. 95–129, American Mathematical Society.
- [4] Komen, G.J., Cavaleri, L., Donelan, M., Hasselmann, K., Hasselmann, S., Janssen, P.A.E.M. 1994 *Dynamics and Modelling of Ocean Wave* (Cambridge U.P.)
- [5] Krasitskii, V.P. 1994 On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves. *J. Fluid Mech.*, **272**, 1–20.
- [6] Phillips, O.M. 1961 On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part 1. *J. Fluid Mech.* **9**, 193–217.
- [7] Pushkarev, A.N., 1999 On the Kolmogorov and frozen turbulence in numerical simulation of capillary waves. *Eur. J. Mech. B/Fluids* **18**, 345–351.
- [8] Tanaka, M., 2001a Verification of Hasselmann's energy transfer among surface gravity waves by direct numerical simulations of primitive equations. *J. Fluid Mech.* **444**, 199–221.
- [9] Tanaka, M., 2001b A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation. *Fluid Dyn. Res.* **28**, 41–60.
- [10] West, B.J., Brueckner, K.A., Janda, R.S., Milder, M. & Milton, R.L. 1987 A new numerical method for surface hydrodynamics. *J. Geophys. Res.*, **92**, 11,803–11,824.
- [11] Zakharov, V.E., 1968 Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys. (Engl. Transl.)*, **2**, 190–194.
- [12] Zakharov, V.E., L'vov, V.S. & Falkovich, G. 1992 *Kolmogorov Spectra of Turbulence I - Wave Turbulence*, Springer.